ECOLE NATIONALE DE
LA METEOROLOGIE

CONCOURS 1979
INGENIEUR DES TRAVAUX

DUREE : 3 heures

NOTE : La clarté et la rigueur des démonstrations joueront un rôle important dans l'appréciation des copies.
On pourra admettre le résultat d'une question pour traiter les suivantes. Un poids égal sera attaché à chacune des quatre parties.

Une fonction F définie sur $\mathbb{R}$ et à valeur dans $\mathbb{R}$ est dite vérifier la condition (C) sur $D \subset \mathbb{R}$ si et seulement si, pour tout entier positif n, on a l'identité :

$$(C) \qquad n^2 F(x) = \sum_{k=0}^{n-1} F\left(\frac{x+k}{n}\right) \qquad \forall x \in D$$

I. Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$, à valeur dans $\mathbb{R}$ et vérifiant (C) pour tout x réel ; montrer que f(x) est nul pour tout x réel.

[On pourra mettre (C) sous la forme équivalente :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} F\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left[F\left(\frac{x}{n} + \frac{k}{n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right)\right] = n F(x) \ ]$$

II. a) Montrer qu'il existe A, fonction de n mais non de x, que l'on déterminera, telle que, pour tout entier positif n :

$$\sin \pi x = A(n) \prod_{k=0}^{n-1} \sin \pi \left(\frac{x+k}{n}\right) \qquad \forall x \in \mathbb{C}$$

[On pourra utiliser la variable $u = e^{\frac{2i\pi x}{n}}$]

b) En déduire que la fonction $x \to \frac{1}{\sin^2(\pi x)}$ vérifie (C) pour tout x réel non entier, c'est à dire $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$.

III. a) On considère la série de fonctions :

$$s(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^2}$$

Soit un intervalle [a,b] avec $0 < a < b < 1$. Montrer qu'il existe une série (u_n) telle que $\sum_{-\infty}^{+\infty} u_n$ converge et :

$$\frac{1}{(x+n)^2} < u_n \qquad \forall x \in [a,b]$$

En déduire que s(x) converge absolument et uniformément si $x \in [a,b]$

b) Montrer que s(x) est définie si $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, qu'elle est périodique de période 1 et vérifie (C) si $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$.

c) Montrer que la fonction $x \to \left(\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)} - \frac{1}{x^2}\right)$ définie si $0 < |x| < 1$ admet une limite si x tend vers zéro.

d) Soit $g(x) = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)} - s(x)$. Montrer que g, définie si $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ admet une limite, que l'on notera g(m), si x réel tend vers m entier relatif. Calculer g(m). (On pourra utiliser l'identité $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{6}$)

.../...

IV. a) Justifier l'écriture :

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+n\pi)^2} \qquad \forall\, x \text{ réel}$$

b) En déduire, par des intégrations, des formules simples pour :

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2} \qquad (\text{avec } |x| < \pi)$$

$$P(x) = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) \qquad (\text{avec } |x| < \pi)$$

c) Quels résultats des parties I à IV pouvez vous généraliser aux cas :

$|x| \geqslant \pi$ ou $x \in \mathbb{C}$?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail